

УДК 372.851

Н. А. Шункова,факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: д-р пед. наук, проф. А. В. Далингер

Сравнительный анализ способов отбора корней тригонометрических уравнений в курсе старшей школы

Аннотация. Статья посвящена сравнительному анализу методов отбора корней тригонометрических уравнений, принадлежащих заданному промежутку. Рассматриваются четыре способа: геометрический, алгебраический, арифметический и функционально-графический. Эффективность каждого способа продемонстрирована на примере решения задания из варианта ЕГЭ по математике профильного уровня, что позволяет наглядно оценить их практическую применимость и дидактический потенциал в рамках школьной программы.

Ключевые слова: уравнение, тригонометрические уравнения, отбор корней при решении тригонометрических уравнений, единый государственный экзамен.

Проблема освоения методов решения тригонометрических уравнений и последующего отбора корней, удовлетворяющих заданным ограничениям, сохраняет свою непреходящую актуальность в школьном курсе математики. Во-первых, потому что умение решать тригонометрические уравнения — одно из основных требований к предметным результатам освоения математики в рамках Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования. Оно представляет собой не только технический навык, но и индикатор освоения фундаментальных разделов математики, связывая понятия функции, периода, множественности решений и их интерпретации на числовой окружности. Во-вторых, задачи на решение тригонометрических уравнений и отбор корней традиционно входят в контрольно-измерительные материалы Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня. Эти задания, часто относящиеся к категории повышенной сложности, служат действенным инструментом для дифференциации выпускников по уровню подготовки.

«Тригонометрическое уравнение — это уравнение, в котором переменные содержатся под знаками тригонометрических функций» [1, с. 202]. Множество всех корней данного уравнения бесконечно. Но, если задан некоторый числовой промежуток, всегда можно отобрать конкретные корни тригонометрического уравнения. Отбор корней в тригонометрических уравнениях осуществляют с помощью разных способов: геометрический, алгебраический, арифметический и функционально-графический [2].

Геометрический подход предполагает визуализацию решений на тригонометрической окружности или числовой прямой. Алгебраический способ основывается на составлении и решении системы двойных неравенств, отражающих границы промежутка, относительно целочисленного параметра серии корней. Арифметический способ заключается в прямом переборе значений параметра, вычислении соответствующих корней и проверке их принадлежности интервалу. Наконец, функционально-графический способ использует построение графиков тригонометрических функций для графического анализа и выбора подходящих решений.

В качестве практической иллюстрации эффективности рассмотренных методик отбора корней проанализируем решение тригонометрического уравнения из демонстрационного варианта ЕГЭ по математике (профильный уровень) 2025 г. Данный пример наглядно продемонстрирует сравнительные преимущества и особенности применения каждого из описанных подходов в условиях, приближенных к реальным экзаменационным.

Пример:

а) решите уравнение

$$2 - 2 \cos(\pi + 2x) - \sqrt{8} \cos x = \sqrt{6} - \sqrt{12} \cos x;$$

б) укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение данного тригонометрического уравнения приводит к следующим множествам корней:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ и } x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выполнение отбора корней рассмотрим всеми, представленными выше способами, на примере одного из множеств решений: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

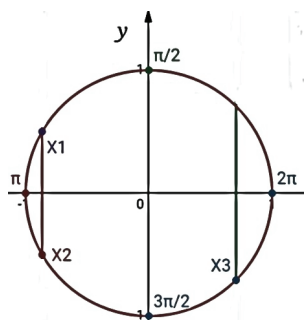
Алгебраический способ:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq 2\pi \quad | \cdot \frac{4}{\pi} \\ 2 &\leq -1 + 8n \leq 8; \\ 3 &\leq 8n \leq 9; \\ \frac{3}{8} &\leq n \leq \frac{9}{8}; \\ n &= 1; \\ x &= \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

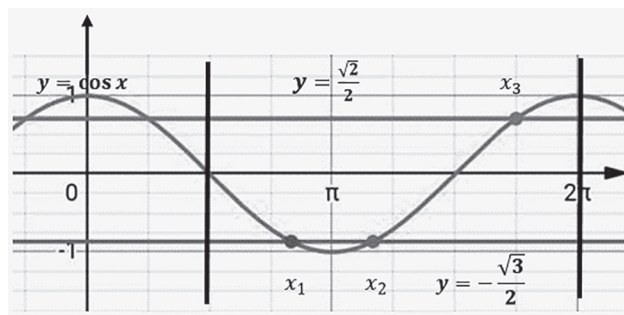
Арифметический способ:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ n = 1, \quad x &= -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right] \\ n = 2, \quad x &= -\frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{15\pi}{4} \notin \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right] \\ n = 0, \quad x &= -\frac{\pi}{4} + 0 = -\frac{\pi}{4} \notin \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right] \end{aligned}$$

Геометрический способ:



Функционально-графический способ:



Для двух последних способов вычисление соответствующих корней осуществляется следующим образом: $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.

Таким образом, проведенный анализ позволяет констатировать, что задача отбора корней при решении тригонометрических уравнений обладает вариативностью и может быть успешно решена с помощью четырех различных способов. Эмпири-

ческие наблюдения демонстрируют, что наиболее востребованными и интуитивно понятными для учащихся являются три ключевых подхода: геометрический, арифметический, алгебраический. Данный факт свидетельствует о важности формирования у обучающихся гибкого инструментария и способности к осознанному выбору оптимального способа действия в зависимости от специфики конкретного уравнения.

1. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. (базовый и углубленный уровни) : учеб. — М. : Мнемозина, 2020. — 457 с.

2. Прокофьев А. А., Корянов А. Г. Математика. ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решения и отбор корней. Типовое задание 13 : учеб.-метод. пособие. — Ростов н/Д. : Легион, 2025. — 171 с.