

УДК 372.851

**Р. И. Бухайтова,**факультет математики, информатики, физики и технологии,  
Омский государственный педагогический университет  
Научный руководитель: д-р пед. наук, проф. В. А. Далингер

## Использование неравенства Коши для решения алгебраических уравнений в курсе основной школы

**Аннотация.** Статья посвящена вопросу использования неравенства Коши для решения уравнений в курсе алгебры 7–9-х классов: проводится анализ классических неравенств с точки зрения их использования учащимися 7–9-х классов, приводятся примеры уравнений, решаемых с его помощью.

**Ключевые слова:** обучение алгебре учащихся 7–9-х классов, классические неравенства, неравенство Коши, алгебраические уравнения, нестандартные способы решения уравнений, решение уравнений с помощью классических неравенств.

**В** современных учебниках математики основной школы значительное внимание уделяется изучению различных методов решения уравнений. Однако классические неравенства, такие как неравенство Коши, неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (АМ–ГМ), неравенство Коши–Буняковского, используются крайне редко, несмотря на их мощный потенциал в упрощении алгебраических преобразований.

Актуальность исследования в области решения уравнений заключается в том, что не все уравнения могут быть решены с помощью известных аналитических методов. Многие уравнения, особенно нелинейные или сложные системы, могут оказаться трудными или даже невозможными для решения традиционными способами. В таких случаях на помощь приходят методы, основанные на неравенствах [1].

Включение таких приемов в работу с учащимися способствует формированию математического мышления, умения видеть границы возможных значений выражения и оценивать результат до вычисления. Это особенно важно при подготовке к олимпиадам и формировании исследовательской культуры учащихся.

В школьной практике чаще всего используется частный случай неравенства Коши — *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим*:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0 \quad [2].$$

Неравенство Коши дает возможность определить наличие и количество корней уравнения.

Допустим, дано уравнение  $x + \frac{4}{x} = k$ ,  $x > 0$ .

Согласно неравенству Коши:  $x + \frac{4}{x} \geq 4$ .

Значит:

- если  $k < 4$  — корней нет,
- если  $k = 4$  — один корень ( $x = 2$ ),
- если  $k > 4$  — два корня.

Рассмотрим несколько примеров, как классические неравенства применяются при решении алгебраических уравнений, изучаемых в курсе алгебры 7–9-х классов.

Пример 1. Решить уравнение  $x + \frac{4}{x} = 5$ ,  $x > 0$ ,

используя неравенство Коши.

Шаг 1. Применяем неравенство Коши

$$x + \frac{4}{x} \geq 2 \left( \sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} \right) = 2 \cdot \sqrt{4} = 4, \text{ т. е. } x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

Шаг 2. Сравниваем с правой частью

Нам требуется значение 5, и оно *больше минимума 4*, поэтому решение *существует*.

Шаг 3. Решим уравнение

$$x + \frac{4}{x} = 5 \Rightarrow \text{умножаем на } x > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Решаем получившееся квадратное уравнение  $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) = 0$ .

Ответ:  $x = 1$ ,  $x = 4$ .

Пример 2. Решить уравнение  $x^2 + \frac{9}{x^2} = 10$ ,  $x > 0$ , используя неравенство Коши.

Решение:

$$1. \ x^2 + \frac{9}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{9}{x^2}} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow \text{минимум}$$

равен 6 ( $6 < 10$ ), значит корни существуют.

$$2. \text{ Решим уравнение } x^2 + \frac{9}{x^2} = 10, \Rightarrow \text{умножаем на } x^2 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow \text{заменяем на } t = x^2$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0.$$

$$t = 1 \text{ или } t = 9.$$

$$x = 1, x = 3.$$

К числу особенностей неравенства Коши относятся:

- позволяет оценивать выражения, не выполняя точных вычислений;
- минимальное (или максимальное) значение выражения достигается только при равенстве слагаемых: ( $a = b$ );

– может использоваться для решения уравнений и неравенств через оценку, без полного раскрытия скобок и преобразований;

– особенно удобно для выражений вида  $x + \frac{c}{x}$ ;  $x^2 + c$ ;  $ax^2 + b$ , так как сразу позволяет понять, может ли равенство выполняться вообще.

Применение классических неравенств дает учащимся возможность увереннее решать уравнения: облегчает поиск решений, позволяет устанавливать их возможные значения и определять число корней. Изучение этих методов в 7–9-х классах — важный шаг в развитии математической грамотности и подготовка к освоению более глубоких математических идей.

1. Бухаитова Р. И. О роли классических неравенств при решении уравнений из курса алгебры 7–9-х классов // Ratio et Natura. — 2024. — № 4 (12). — URL: <https://ratio-natura.ru/sites/default/files/2025-04/o-rol-i-klassicheskikh-neravenstv-pri-reshenii-uravneniy-iz-kursa-algebry-7-9-kh-klassov.pdf> (дата обращения: 11.11.2025).

2. Рогачева Т. Ю., Коваленко О. Н. К вопросу о решении алгебраических уравнений и неравенств с помощью классических числовых неравенств // Актуальные проблемы авиации и космонавтики : сб. материалов XIII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. Дню космонавтики : в 3 т. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова. — Красноярск : Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2017. — Т. 2. — С. 298–300.