

УДК 372.851

Р. И. Бухайтова,факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: д-р пед. наук, проф. В. А. Далингер

О роли классических неравенств при решении уравнений из курса алгебры 7–9-х классов

Аннотация. В статье рассматривается вопрос использования классических неравенств для решения уравнений в курсе алгебры 7–9-х классов. Проводится анализ классических неравенств с точки зрения их использования учащимися 7–9-х классов. Приводятся примеры уравнений, решаемых с их помощью.

Ключевые слова: обучение алгебре, классические неравенства, алгебраические уравнения, нестандартные способы решения уравнений, решение уравнений с помощью классических неравенств.

В современном математическом образовании особую значимость приобретает развитие у учащихся умений решать различные виды уравнений, необходимых как для дальнейшего изучения математики, так и для решения практических задач. В школьном курсе алгебры учащиеся 7–9-х классов знакомятся с различными видами уравнений и методами их решения. Однако не все уравнения решаются с помощью известных аналитических методов. Многие уравнения, особенно нелинейные, могут оказаться трудными или даже невозможными для решения традиционными способами. В таких случаях на помощь приходят методы, основанные на использовании классических неравенств, которые могут существенно расширить математический кругозор учащихся.

Неравенства позволяют исследовать свойства решений, определять их существование и единственность, а также устанавливать границы для возможных значений неизвестной. Использование неравенств в качестве инструмента для исследования уравнений также способствует развитию новых теоретических подходов и методов, которые могут быть применены в различных областях, таких как экономика, биология, физика и инженерия. Таким образом, актуальность данного исследования обусловлена необходимостью поиска альтернативных путей решения сложных уравнений и расширением арсенала математических инструментов для анализа различных явлений.

Одним из ключевых инструментов, помогающих упростить процесс решения, являются классические неравенства. В таблице представлены некоторые из этих неравенств, использование которых возможно при изучении алгебры учащимися 7–9-х классов [1;

2]. Знание этих неравенств позволяет проводить различные преобразования уравнений, находить границы решения и даже определять количество корней.

Пример. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + x - 16} + \sqrt{x - x^2 + 16} = x^2 - 7x + 17.$$

Решение

Представим каждое слагаемое левой части в виде, когда можно будет воспользоваться неравенством Коши:

$$1. \sqrt{x^2 + x - 16} = \sqrt{(x^2 + x - 16) \cdot 1} \leq \frac{(x^2 + x - 16) + 1}{2} = \frac{x^2 + x - 15}{2}$$

$$2. \sqrt{x - x^2 + 16} = \sqrt{(x - x^2 + 16) \cdot 1} \leq \frac{(x - x^2 + 16) + 1}{2} = \frac{x - x^2 + 17}{2}$$

$$3. \text{ Таким образом, } \sqrt{x^2 + x - 16} + \sqrt{x - x^2 + 16} \leq x + 1.$$

4. Значит, и правая часть исходного уравнения должна быть не больше $x + 1$:

$$x^2 - 7x + 17 \leq x + 1;$$

$$x^2 - 8x + 16 \leq 0;$$

$$(x - 4)^2 \leq 0;$$

$$x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

Использование в процессе решения сложного иррационального уравнения с применением одного из классических неравенств позволило значительно

Классические неравенства

№ п/п	Название	Неравенства
1	Обобщенное неравенство Коши	$\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \geq x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_n^{p_n}$
2	Неравенство Коши	$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$
3	Неравенство Коши — Буняковского	$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$
4	Неравенство Чебышева	$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{n}$
5	Неравенство Иенсена	$\frac{m_1\sqrt{x_1} + \dots + m_n\sqrt{x_n}}{m_1 + \dots + m_n} \leq \sqrt{\frac{m_1x_1 + \dots + m_nx_n}{m_1 + \dots + m_n}}$
6	Неравенство Минковского	$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdot \dots \cdot (a_n + b_n)}$
7	Неравенство Бернулли	Если $x \geq -1$, то $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, для всех $n \in N_0$

облегчить процесс решения. Вместо того чтобы дважды возводить в квадрат исходное уравнение, после оценки потребовалось просто решить квадратное неравенство.

Знание классических неравенств позволяет учащимся:

- упростить решение уравнений: преобразования с использованием неравенств могут свести сложное уравнение к более простому, которое легче решить;
- найти границы решения: неравенства позволяют определить диапазон значений, в которых могут находиться решения уравнения;

– проверить количество корней: некоторые неравенства позволяют определить, имеет ли уравнение корни, и если да, то сколько.

В заключение отметим, что классические неравенства являются важным инструментом в арсенале учащегося для решения уравнений в школьном курсе алгебры. Изучение этих неравенств учащимися 7–9-х классов является неотъемлемой частью развития математической грамотности и закладывает фундамент для успешного освоения более сложных математических концепций в будущем.

1. Далингер В. А. Классические неравенства и решение задач с их использованием : учеб. пособие. — Омск : Изд-во Ом. гос. пед. ун-та, 2013. — 131 с.

2. Рогачёва Т. Ю., Коваленко О. Н. К вопросу о решении алгебраических уравнений и неравенств с помощью классических числовых неравенств // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. — 2017. — № 13. — Электрон. версия. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/k-voprosu-o-reshenii-algebraicheskikh-uravneniy-i-neravenstv-s-pomoschyu-klassicheskikh-chislovyh-neravenstv> (дата обращения: 03.11.2024).