УДК 512.643.8

А. М. Глухова,
факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. Князев

Псевдообратные матрицы

Аннотация. В статье рассматривается история и современное состояние изучения псевдообратных матриц. Выводятся формулы для нахождения псевдообратных матриц для частных случаев прямоугольных матриц.

Ключевые слова: матрица, обратная матрица, псевдообратная матрица, ранг матрицы, определитель квадратной матрицы.

История матриц берет свое начало более 4000 лет назад: например, первое изображение древнекитайского магического квадрата Лао Шу, матрицы третьего порядка, датируется 2200 г. до н. э. Подобные квадраты были и у арабских, и у индийских математиков, позднее они попали в Западную Европу. Следующее значительное открытие в этой области — методы К. Ф. Гаусса и Г. Крамера в XVII в., а в XIX в. У. Гамильтон и А. Кэли оформили теорию матриц как отдельный раздел линейной алгебры, который затем развивали в своих работах К. Вейерштрасс, М. Жордан и Ф. Фробениус.

Тем не менее псевдообратные матрицы — молодое понятие. Впервые их концепцию представил Э. Френдгольм в 1903 г. Независимо друг от друга их исследовали и развивали Элиаким Мур и Рожер Пенроуз, чьими именами названа теорема, утверждающая о существовании и единственности для любой матрицы над действительными и комплексными числами псевдообратной матрицы, — важнейшая теорема, связанная с обобщением обратной матрицы.

Псевдообратная матрица $\boldsymbol{A}^+$ для матрицы $\boldsymbol{A}$ — матрица, удовлетворяющая условиям регулярности ($\mathbf{AA^+A = A}$, $\mathbf{A^+AA^+ = A^+}$) и симметричности ($\mathbf{AA^+ = (AA^+)^T}$, $\mathbf{A^+A = (A^+A)^T}$).

Псевдообратные матрицы еще больше расширяют применение матричной теории в других разделах математики и других науках, так как они позволяют находить в каком-то выбранном смысле приемлемые решения «…несовместных систем линейных алгебраических уравнений», возникающих в задачах, «…связанных с обработкой и информационным анализом экспериментальных данных» [1, с. 40]. Благодаря им матричный метод может быть применим при решении задач не только точных наук, таких как математика, физика или экономика, но и гуманитарных наук, например социологии.

Один из алгоритмов нахождения псевдообратной матрицы — «нахождение произведения псевдообратных матриц множителей ее скелетного разложения» [2, с. 21].

$A = BC$, $A^+ = (BC)^+ = C^+B^+$, где $B^+ = (B^TB)^{-1}B^T$ и $C^+ = C^T(CC^T)^{-1}$.

Этот способ универсален, но долог в выполнении, поэтому нас заинтересовали разные частные случаи нахождения псевдообратной матрицы, которых не нашлось в доступной литературе, — для квадратной матрицы D второго порядка и ранга 1 и матрицы A порядка $k \cdot n$ и ранга 2:

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{pmatrix},\ D = BC = \begin{pmatrix} a \\ \alpha a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \end{pmatrix},$$

$$D^+ = C^+B^+ = \begin{pmatrix} a^2/(a^2+b^2) \\ ab/(a^2+b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a(1+\alpha^2) & \alpha/a(1+\alpha^2) \end{pmatrix},$$

$$D^+ = \begin{pmatrix} a/(a^2+b^2)(1+\alpha^2) & \alpha a/(a^2+b^2)(1+\alpha^2) \\ b/(a^2+b^2)(1+\alpha^2) & \alpha b/(a^2+b^2)(1+\alpha^2) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix},$$

© Глухова А. М., 2022

$$A^{+}=C^{+}B^{+}=\begin{pmatrix} {}^{4n-2}/_{n(n+1)} & {}^{-4}/_{n} \\ {}^{4n-8}/_{n(n+1)} & {}^{10-4n}/_{n(n-1)} \\ {}^{4n-14}/_{n(n+1)} & {}^{16-4n}/_{n(n-1)} \\ \dots & \dots \\ {}^{-(2n+4)}/_{n(n+1)} & {}^{2}/_{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^{1}/_{k-1} & {}^{1}/_{k-1} & \dots & {}^{1}/_{k-1} & 0 \\ {}^{1}/_{k-1} & {}^{1}/_{k-1} & \dots & {}^{1}/_{k-1} & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^{+}=\begin{pmatrix} {}^{2}/_{(n^2-n)(k-1)} & {}^{2}/_{(n^2-n)(k-1)} & \dots & {}^{2}/_{(n^2-n)(k-1)} & {}^{4}/_{n} \\ {}^{2}/_{(n^2-n)(k-1)} & {}^{2}/_{(n^2-n)(k-1)} & \dots & {}^{2}/_{(n^2-n)(k-1)} & {}^{4n-10}/_{n(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{-2}/_{(n^2-n)(k-1)} & {}^{-2}/_{(n^2-n)(k-1)} & \dots & {}^{-2}/_{(n^2-n)(k-1)} & {}^{-2}/_{n} \end{pmatrix}.$$

Дальнейшие исследования будут направлены на нахождение пвсевдообратных матриц для матриц более сложного вида.

1. *Раскин Л. Г., Серая О. В., Иванчихин Ю. В.* Информационный анализ несовместных систем линейных алгебраических уравнений. Минимаксное решение // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2012. — № 4. — С. 40–43.

2. *Севастьянов Л. А., Ловецкий К. П., Ланеев Е. Б.* Регулярные методы и алгоритмы расчета обратных задач в моделях оптических структур : учеб. пособие. — М. : Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 2008. — 132 с.