УДК 511.14

В. А. Серянина,
факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. Князев

Гауссовые числа. Ров Гаусса

Аннотация. Статья посвящена рассмотрению нерешенной проблемы математики, связанной со рвом Гаусса. Приведены теоретические сведения, а также исследования автора по данной теме.

Ключевые слова: классическая теория чисел, гауссовы числа, ров Гаусса, комплексные числа, простые числа, множество, скачок, бесконечность.

Гауссовы целые числа — это комплексные числа, у которых вещественная и мнимая часть — это целые числа. Например: $1 + 3i$; $-2 + 13i$; $7i$; 9; $5 - i$.

Впервые такие числа были введены Карлом Фридрихом Гауссом в его монографии «Теория биквадратичных вычетов». Множество гауссовых целых чисел принято записывать как $Z[i]$. Представленное обозначение дает понять, что множество гауссовых чисел исходит из множества целых чисел Z с добавлением в него мнимой единицы i и композиций i с целыми числами. Свойства всех гауссовых чисел схожи со свойствами обыкновенных целых чисел, но имеются и большие различия [2].

Формальным определением гауссовых чисел можно считать:

$$Z[i]=\{a + bi|a, b \in Z\}.$$

«Множество $Z[i]$ включает в себя множество обычных целых чисел Z и представляет собой расширение данного множества. Произведение, разность и сумма гауссовых чисел также будут гауссовыми числами. Множество гауссовых чисел, относительно операции сложения и умножения, образует евклидово кольцо. Установить в подобном комплексном кольце какую-либо упорядоченность не получится. Можно вдобавок заметить, что сопряженное к гауссовому числу $a + bi$ также будет гауссовым числом $a - bi$.

Всякое гауссово число $z = a + bi$ будет удовлетворять следующему квадратному уравнению: $(z - a)^2 + b^2 = 0$.

Следовательно, гауссово число $z = a + bi$ является алгебраическим числом (так как есть корень многочлена с целыми коэффициентами)» [2].

Простое гауссово число — это такое ненулевое число, которое не имеет никаких прочих делителей, помимо тривиальных (1; -1; i; $-i$; $a + bi$; $-a - bi$; $-b + ai$; $b - ai$). Число, не являющееся простым, именуют составным числом.

Обратим внимание на некоторые особенности простых гауссовых чисел:

• «Если $a + bi$ — это простое гауссово число, то сопряженное ему гауссово число $a - bi$ также будет простым.

• Если простое гауссово число есть делитель некоторого произведения гауссовых чисел, то оно будет делителем по крайней мере одного из его сомножителей.

• Норма любого простого гауссова числа, помимо ассоциированных с $1 + i$, всегда будет нечетной и поэтому она примет вид $4n + 1$» [2].

В теории чисел существует нерешенная проблема, именуемая рвом Гаусса. Многие ученые и великие математики задавались вопросом: возможно ли найти такую бесконечную последовательность, состоящую из различных простых чисел Гаусса, чтобы разница между этими последовательными числами в заданной последовательности была постоянной? [1]

Эта не решенная до сих пор задача впервые была поставлена еще в 1962 г. ученым Бэзилом Гордоном.

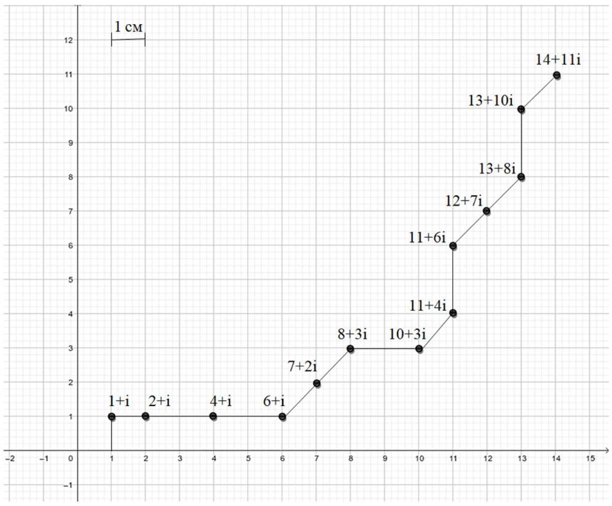
Напомним, что простыми натуральными числами считаются только те натуральные числа, которые больше единицы и делятся на себя и на единицу. Для обычных простых чисел подобная последовательность не существует. Это объясняется известной теоремой о распределении простых чисел. Данная теорема утверждает, что имеются разрывы произвольной длины в определенной очередности простых чисел. У этой теоремы есть простое объяснение: для любого числа n в ряду из $n - 1$ последовательных чисел $n! + 2$, $n! + 3$, …, $n! + n$ все числа будут составными [1].

Решение рва Гаусса заключается в поиске такого скачка между двумя простыми гауссовыми числами, который минимизирует этот наибольший прыжок и сделает его постоянным. Это открытие будет вариантом решения вопроса о минимаксном пути, где размер скачка оптимального пути будет равен ширине самого широкого разрыва между двумя соседними простыми числами. Этот разрыв и будет называться рвом. Ров может быть определен путем разделения простых чисел на два подмножества. Ширина рва будет равна расстоянию между соседней парой чисел (по одному из каждого подмножества) [1].

Тогда нерешенную проблему о рве Гаусса можно представить в следующем виде: есть ли конечная грань ширины рвов, имеющих конечное число простых чисел со стороны начала координат?

Нас заинтересовала эта проблема, и мы приступили к ее исследованию. Для этого мы взяли декартову систему координат с единичным отрезком, равным 1 см (рис.). При рассмотрении первой четверти системы координат нам удалось найти и записать небольшую последовательность простых гауссовых чисел, ширина рва между которыми не превышает двух в нашем масштабе:

1) $1 + i$ — простое гауссово число по определению;
2) $2 + i$ — простое число ($2^2 + 1^2 = 5$);
3) $4 + i$ — простое число ($4^2 + 1^2 = 17$);
4) $6 + i$ — простое число ($6^2 + 1^2 = 37$);
5) $7 + 2i$ — простое число ($7^2 + 2^2 = 53$);
6) $8 + 3i$ — простое число ($8^2 + 3^2 = 73$);
7) $10 + 3i$ — простое число ($10^2 + 3^2 = 109$);
8) $11 + 4i$ — простое число ($11^2 + 4^2 = 137$);
9) $11+ 6i$ — простое число ($11^2 + 6^2 = 157$);
10) $12 + 7i$ — простое число ($12^2 + 7^2 = 193$);
11) $13 + 8i$ — простое число ($13^2 + 8^2 = 233$);
12) $13 + 10i$ — простое число ($13^2 + 10^2 = 269$);
13) $14 + 11i$ — простое число ($14^2 + 11^2 = 317$).



Декартова система координат с отрезком, равным 1 см

Все эти числа простые, а скачок между ними не превышает двух. Дальше эта последовательность обрывается, так как числа уже не будут простыми.

Таким образом, мы можем сделать вывод о том, что, очевидно, существуют рвы произвольной ширины, однако они не обязательно будут разделять начало координат от бесконечности. Наше мнение таково, что до бесконечности продолжаться последовательность из простых гауссовых чисел всё же не может.

1. Гауссов ров // ВикибриФ : [сайт]. — URL: https://ru.wikibrief.org/wiki/Gaussian_moat (дата обращения: 15.11.2022).

2. Гауссовы целые числа. — URL: http://poivs.tsput.ru/ru/Math/NumberTheory/AlgebraicNumberTheory/AlgebraicNumbers/GaussianIntegers (дата обращения: 15.11.2022).