УДК 519.62

А. Ю. Гришаева,
факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: канд. пед. наук Л. М. Нуриева

Язык кванторов и основания математической логики

Аннотация. В статье рассматриваются математические понятия высказывания, формулы высказывания, предиката, квантора. Описывается, какие логические операции могут применяться в работе над высказываниями. Обозначается практическая значимость математической логики.

Ключевые слова: кванторы, предикаты, математическая логика, высказывания, доказательство «в лоб», доказательство методом «от противного».

Элементы математической логики являются неотъемлемой частью школьного курса математики. На всех этапах обучения данный раздел внедряется в основной математический материал. Постепенность является ключевым моментом внедрения языка математической логики в школьный курс математики, другими словами, язык может употребляться только для изученных понятий, и только после этого становится неотъемлемой частью математической речи.

Одним из важнейших объектов математической логики является высказывание. В алгебре высказываний изучаются способы построения высказываний, а также закономерности таких способов построения.

Высказывание представляет собой предложение, которое может принимать следующие значения: «истина» или «ложь». Высказывания обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C и т. д. Переменные, вместо которых можно подставлять какие-либо высказывания, называются *пропозициональными (высказывательными) переменными* [2]. Такие переменные, а также скобки и логические связки составляют *алфавит* языка алгебры высказываний. Истинное высказывание обозначается символом 1, а ложное — 0 [1].

Над высказываниями могут применяться следующие логические операции: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность* [3, с. 5–7].

Таблица истинности логических операций

A	B	¬A	A ∧ B	A ∨ B	A → B	A ↔ B
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Элементы алфавита алгебры высказываний дают нам возможность построения различных *логических формул.*

Дадим индуктивное определение формулы алгебры высказываний:

«1) Всякая пропозициональная переменная есть формула.

2) Если A — формула, то и ¬A является формулой.

3) Если A и B — формулы, то выражения (A ∧ B), (A ∨ B), (A → B), (A ~ B), (A ⊕ B) также являются формулами.

4) Других формул, кроме построенных по правилам трех предыдущих пунктов, нет» [1, с. 8].

По определению формул, они перенасыщены скобками и трудночитаемы, поэтому был принят ряд соглашений:

«а) Наружные скобки в записи формул можно опускать.

б) Считается, что конъюнкция “сильнее” дизъюнкции, а обе они “сильнее” неравнозначности, импликации и эквиваленции. Отрицание “сильнее” всех других операций. Поэтому часть скобок, определяющих порядок действий, можно опускать.

в) Скобки, определяющие порядок действий, в ассоциативном случае можно опускать.

г) Конъюнкцию можно обозначать знаком “·” или знак конъюнкции опускать» [1, с. 9].

При опущении скобок логические операции выполняются в соответствии с порядком их старшинства: ¬, ∧, ∨, →, ↔.

Еще одним разделом математической логики является логика предикатов. *Предикатом* является высказывание, содержащее неизвестную (или несколько неизвестных) [1]. Его функциональная природа влечет за собой важное для математической логики понятие.

Примерно с середины XX в. в математический язык входят новые символы — кванторы. *Квантор* — это общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката. В математической логике наиболее употребительны квантор всеобщности ∀ (перевернутая первая буква английского слова «Any») и квантор существования ∃ (перевернутая первая буква английского слова «Exists») [1]. Функцией кванторов является сокращение записи утверждений и определений, а также представление записи в более наглядном и понятном виде.

Пример 1. Записать на языке предикатов следующее высказывание: «Каждое четное число, большее четырех, является суммой двух простых чисел» (гипотеза Гольдбаха) [2].

Решение. Введем следующие обозначения:

A(x) — «x — четные»;

B(x) — «x — простые»;

C(x) — «x > 4».

Тогда высказывание будет иметь вид:

$$((\forall x)\ (A(x) \wedge C(x))) \rightarrow$$
$$((\exists y), (\exists z)\ B(y) \wedge B(z) \wedge (x = y + z)).$$

При навешивании отрицания на кванторы общности ∀ и существования ∃ квантор общности необходимо заменить на квантор существования и наоборот.

Пусть P(x) — одноместный предикат, тогда выполняются следующие тождества:

$$\overline{\forall x\ P(x)} \equiv \exists x\ \overline{P(x)},$$

$$\overline{\exists x\ P(x)} \equiv \forall x\ \overline{P(x)}.$$

Пример 2. Записать высказывание «все рациональные числа — действительные» на языке предикатов. Построить отрицание [2].

Решение. Введем следующие обозначения:

Q(x) — «x — рациональные»;

R(x) — «x — действительные».

Тогда высказывание будет иметь вид:

$$\overline{(\forall x)\ (Q(x) \rightarrow R(x))} \equiv \overline{(\exists x)\ (Q(x) \rightarrow R(x))} \equiv$$

$$\equiv (\exists x)\ \overline{(\overline{Q(x)} \vee R(x))} \equiv (\exists x)\ (\overline{Q(x)} \wedge R(x)).$$

Всё вышеописанное имеет большую практическую ценность в школьной математике, например при решении задач на доказательство. Существует два вида доказательств: «в лоб» и «от противного».

Суть доказательства «в лоб» заключается в следующем: суждение, которое нам необходимо доказать, выводится из уже известных определений, аксиом, доказанных теорем и т. д. Основной отличительной чертой доказательства «в лоб» является постоянное движение от истинных высказываний к истинным высказываниям.

При доказательстве путем «от противного» за истинное высказывание принимается отрицание данного суждения, а в ходе доказательства устанавливается противоречие с уже известным определением, аксиомой, доказанной теоремой и т. д., из чего следует истинность суждения, которое нам необходимо было доказать. Отличительной чертой доказательства «от противного» является то, что вывод об истинности теоремы устанавливается из ложного высказывания о неверности утверждения теоремы.

Пример 3. Докажите, что формула $(\forall x)\ (P(x)) \rightarrow P(y)$ является тавтологией [2].

Доказательство: Если предположить, что формула превращается в ложное высказывание для некоторых конкретных предикатов *P(x)* и *P(y)*, то в этом случае высказывание $(\forall x)\ (P(x))$ — истинно, а высказывание *P(y)* — ложно. Из истинности высказывания $(\forall x)\ (P(x))$ следует, что высказывание *P(y)* истинно, что противоречит тому, что высказывание *P(y)* ложно, следовательно, формула является тавтологией алгебры предикатов.

1. *Агарева О. Ю., Селиванов Ю. В.* Элементы математической логики : учеб. пособие. — М. : МАТИ, 2008. — 52 с.

2. *Игошин В. И.* Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов : учеб. пособие для студ. физ.-мат. выш. учеб. заведений. — М. : Академия, 2007. — 304 с.

3. *Куртова Л. Н.* Основы математической логики : учеб. пособие. — Белгород : Изд-во НИУ «БелГУ», 2018. — 85 с.