УДК 511.331

А. В. Колмогорова,
факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: канд. физ.-мат. наук, доц. Д. В. Соломатин

Теорема Дирихле об арифметических прогрессиях

Аннотация. Статья посвящена актуальным приложениям теоремы Дирихле об арифметических прогрессиях. Рассматривается теорема о простых числах Дирихле и несколько примеров решения задач с ее помощью.

Ключевые слова: теорема Дирихле, простое число, натуральное число, арифметическая прогрессия.

В исследованиях по математике XXI в. нередко можно встретить приложения классических результатов теории чисел. Так, в 2021 г. математической общественности был представлен новый «алгоритмический метод вычисления константы Эйлера–Кронекера (EK_q) для круговых полей через различные операции с символом Дирихле» [3, с. 5], показавший лучшие результаты в сравнении с двумя другими способами на том же объеме входных данных. Кроме того, теорема Дирихле позволяет собрать больше информации об обобщенных константах Эйлера в арифметических прогрессиях. Упомянутый алгоритм использует «обобщенную гамма-функцию» [2, с. 51] на некоторых рациональных аргументах.

В основе вычисления различных значений символа Дирихле лежит теорема Дирихле, предоставляющая возможность для решения большого количества задач более простым способом. Упомянутая теорема была впервые высказана Л. Эйлером в 1783 г. В 1798 г. А. Лежандр опубликовал доказательство для четных m, использовав одну ошибочную лемму. Полностью доказал эту теорему в 1837–1839 гг. Петер Густав Лежён-Дирихле (1805–1859), немецкий математик, автор трудов по аналитической теории чисел, теории функций, математической физике.

Теорема Дирихле в теории чисел называется теоремой о простых числах Дирихле и гласит, что «для любых двух взаимнопростых положительных чисел m и n (m и n не имеют нетривиальных общих множителей) существует бесконечно много простых чисел вида $m + \alpha n$, где значения α — положительные целые числа». Более точно, теорема Дирихле утверждает, что последовательность $m, m + n, m + 2n, m + 3n, \ldots, m + \alpha n, \ldots$ содержит бесконечно много простых чисел. Напомним одно важное свойство простых чисел, заключающееся в том, что если натуральное число d является составным, то для наименьшего простого делителя g числа d выполняется неравенство $g^2 \leq d$. Детально с «общими свойствами рядов Дирихле» можно ознакомиться в научной литературе [1, с. 331], а мы рассмотрим применение столь важной теоремы при решении школьных математических задач.

Задача 1. Найдите не менее пяти чисел из бесконечного множества простых чисел.

Решение. Рассмотрим прогрессию вида $4\alpha + 3$ (при целом α). Заметим, что всякое простое число больше 2 обязательно нечетное (иначе оно делилось бы на число 2). Возьмем несколько целых чисел $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 4$, $\alpha_5 = 5$ и т. д. Теперь подставим в нашу прогрессию: $4 \cdot 0 + 3 = 3$; $4 \cdot 1 + 3 = 7$; $4 \cdot 2 + 3 = 11$; $4 \cdot 4 + 3 = 19$; $4 \cdot 5 + 3 = 23$. Итак, мы получили пять чисел из бесконечного множества простых чисел. По такому же принципу можно найти первые десять чисел из бесконечного множества простых чисел в прогрессиях: 1) $8\alpha + 1$, 2) $10\alpha + 9$.

Задача 2. Найдите все простые числа k, чтобы $k - 28$ и $k + 40$ тоже были простыми.

Решение. Так как $k - 28$ — то же самое, что и $k + 2 \pmod 3$, а $k + 40$ — то же самое, что и $k + 1 \pmod 3$, то числа вида $k - 28$ и $k + 40$ имеют разные остатки при делении на 3. Поэтому хотя бы одно из них делится на 3 и, следовательно, равно 3. Так как наименьшее из них — это $k - 28$, то $k - 28 = 3$; $k = 3 + 28$; $k = 31$. Поэтому $k + 40 = 71$ — тоже простое число. Ответ: $k = 31$.

И в заключение хотелось бы сказать, что теорема Дирихле — это достаточно простое утверждение. Но несмотря на некоторую очевидность этого принципа, его применение является весьма эффективным методом решения задач, дающим во многих случаях наиболее простое и изящное решение. Теорема Дирихле, кроме всего прочего, дает возможность решать логические и геометрические задачи, а также задачи, содержащие числовые последовательности, следовательно, формирует одно из актуальных направлений организации процесса обучения математике.

1. *Воронин С. М.* Дзета-функция Римана. — М. : Физматлит, 1994. — 376 с.

2. *Карацуба А. Л.* Основы аналитической теории чисел. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 240 с.

3. *Languasco A.* Efficient computation of the Euler–Kronecker constants of prime cyclotomic fields // Research in Number Theory. — 2021. — Vol. 7, iss. 1. — URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs40993-020-00213-1 (дата обращения: 17.10.2021).