УДК 517

А. Ю. Петроченко,
факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: канд. пед. наук Т. П. Фисенко

Особые приемы вычисления определенного интеграла

Аннотация. В статье отмечается, что при вычислении определенных интегралов, в отличие от неопределенных, есть возможность получить результат без определения посредством основных методов интегрирования первообразной для подынтегральной функции. В некоторых случаях расчеты можно упростить, если применить свойства определенных интегралов, воспользоваться геометрическим смыслом определенного интеграла.

Ключевые слова: определенный интеграл, методы вычисления, нечетные функции, криволинейная трапеция, геометрический смысл.

Вычисление определенных интегралов от некоторых функций может быть весьма затруднительным и не очень простым, но если рассмотреть симметричные пределы интегрирования, то задача во многом упрощается. Приведем примеры таких интегралов:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx$;

2) $\int\limits_{10}^{-10} x^4 \cdot arctg(x^3 - x)\, dx$;

3) $\int\limits_{-0,5}^{0,5} x^2 \cdot \ln\frac{1-x^3}{1+x^3} dx$.

Особенность их быстрого вычисления заключается в том, что подынтегральная функция в каждом из указанных интегралов является нечетной, и с учетом симметричности пределов интегрирования получаем в ответе 0. Здесь мы использовали следующее утверждение: «если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [–*a*; *a*], симметричном относительно начала координат, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция} \\ 0 & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция} \end{cases} »$$

[2, с. 272].

Например, исследуя функцию $y = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$ на четность: $y(-x) = \cos^2(-x) \sin^3(-x) = \cos^2 x \sin^3 x = -y(x)$, заключаем, что она является нечетной. Таким образом, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx = 0$.

Использование геометрического смысла определенного интеграла позволяет вычислять отдельные интегралы через непосредственное нахождение площадей соответствующих фигур, по формулам площадей плоских фигур, известных из школьного курса геометрии, а также с учетом того, в верхней или в нижней полуплоскости находится построенная фигура или ее части.

Геометрический смысл определенного интеграла от неотрицательной на отрезке [*a; b*] функции $y = f(x)$ заключается в том, он «равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции *y = f(x)*, снизу — отрезком оси *Ox*, слева — отрезком прямой *x = a*, справа — отрезком прямой *x = b*:

$$S_{ABCD} = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx\text{» [2, с. 261].}$$

Несмотря на то, что интеграл $\int\limits_{1}^{3} (7-2x)dx$ вычисляется достаточно просто и непосредственно по формуле Ньютона-Лейбница, сравним такое его решение с решением через использование геометрического образа.

$$\int\limits_{1}^{3} (7-2x)dx = 7\int\limits_{1}^{3} dx - 2\int\limits_{1}^{3} xdx = 7x\Big|_1^3 - 2\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^3 =$$

$$= 7x\Big|_1^3 - x^2\Big|_1^3 = 7(3-1) - (9-1) = 21 - 7 - 9 + 1 = 6.$$

Для вычисления интеграла через геометрический смысл построим прямые: $y = 7 - 2x$, $x = 1$, $x = 3$ (рис. 1). Определенный интеграл равен площади прямоугольной трапеции с основаниями

1 и 5 и высотой 2: $S = \dfrac{(1+5)}{2} 2 = 6$. Результаты двух способов совпали.

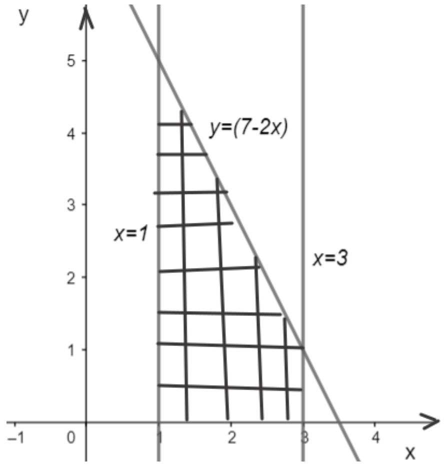

Рис. 1. Криволинейная трапеция, образованная прямой y = 7 – 2x

Непосредственное вычисление интеграла $\int\limits_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$ по формуле Ньютона-Лейбница, даже при условии известной первообразной для подынтегральной функции, не является очень простым. Сразу воспользуемся таблицей интегралов:

$$\int\limits_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{(9-x^2)} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{3} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\sqrt{(9-3^2)} + \frac{9}{2}\arcsin 1\right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{(9-(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2)} +\right.$$

$$\left. + \frac{9}{2}\arcsin(\frac{3\sqrt{3}}{6})\right) = \frac{9\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Сейчас вычислим этот интеграл, используя геометрический смысл определенного интеграла. Подынтегральная функция $y = \sqrt{9-x^2}$ задает верхнюю половину окружности с центром в начале координат и с радиусом, равным 3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой частью окружности, прямыми $y = 0$, $x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $x = 3$, может быть вычислена и геометрически, как разность площади сектора *ABD* и треугольника *ABC* (рис. 2).

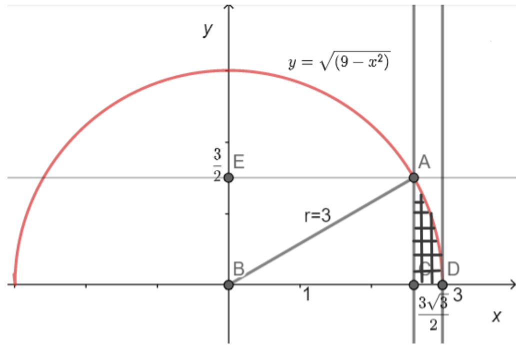

Рис. 2. Криволинейная трапеция, порождаемая графиком функции $y = \sqrt{9-x^2}$

Площадь сектора *ABD* находим по формуле $S_1 = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$, где $r = 3$, $tg\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Площадь S_2 треугольника *ABC* вычисляем как половину произведения двух катетов. В итоге площади *S* искомой области *ACD*:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{9\cdot 30\cdot\pi}{360} - \frac{1\cdot 3\cdot 3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Геометрический смысл определенного интеграла позволяет также «вычислить площадь криволинейного сектора с помощью формулы площади фигуры, заданной в полярных координатах: $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$» [1, с. 192].

Например, площадь сектора *ABD* (рис. 2) могла быть вычислена по указанной формуле, с учетом того, что уравнение ограничивающей его окружности в полярных координатах имеет вид: *r* = 3. Тогда получаем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} 9\,d\varphi = \frac{9}{2}\varphi\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}.$$

Как можем убедиться, такой прием еще быстрее привел к результату.

В результате проделанной работы можно заметить, что применение отдельных свойств геометрического смысла определенного интеграла во многом упрощают его вычисление по сравнению с применением формулы Ньютона-Лейбница.

1. *Запорожец Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу : учеб. пособие. — СПб. : Лань, 2006. — 464 с.

2. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. — М. : АЙРИС-пресс, 2002. — 608 с.