УДК 519.832

Е. П. Качесова,
факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: канд. пед. наук Л. М. Нуриева

Основная теорема для произвольных квадратных игр и ее применение на практике

Аннотация. В статье рассматривается применение теоремы о минимаксе из теории игр в контексте специально разработанной игры «Учитель-ученик», направленной на подбор оптимальной педагогической стратегии для учителя.

Ключевые слова: теория игр, теорема о минимаксе, матрица игры, игрок, решение игры.

Теория игр — очень молодая ветвь математической науки, однако сейчас ее можно применить почти в любой сфере жизни. Особенно широко теория игр используется в экономике, менеджменте, оптимизации процессов. Одной из самых распространенных теорем теории игр является теорема Неймана-Моргенштерна о минимаксе [3].

В этой статье предлагается игра «Учитель-ученик» как вариант приложения теории игр в педагогике и пример использования теоремы о минимаксе, составляется матрица игры [1] и предлагаются дальнейшие действия для оптимизации результатов.

Необходимо начать с формулировки основной теоремы для произвольных квадратных игр, также называемой теоремой о минимаксе.

Пусть $\begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{Vmatrix}$ — некоторая матрица игры,

и пусть математическое ожидание выигрыша $E(X,Y)$

для любого $X = \|x_1 \dots x_m\|$ и любого $Y = \|y_1 \dots y_n\|$, являющихся соответственно элементами множеств S_m и S_n, определено следующим образом:

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Тогда величины $max_{X \in S_m} min_{Y \in S_n} E(X,Y)$ и $min_{Y \in S_n} max_{X \in S_m} E(X,Y)$ существуют и равны между собой [2].

В данной работе будет приводиться не доказательство этой теоремы, а только ее практическое применение.

Для этого разработана игра с нулевой суммой, которая заключается в следующем: игрок А — учитель, игрок В — ученик. Во время учебы ученик обязан тратить время на обучение в школе $t_{шк}$ и домашнюю работу $t_д$, но ему очень не хочется заниматься. Поэтому в его интересах делать как можно меньше работы, однако в интересах учителя выполнять план нагрузки $t_п$. Отсюда мы получаем функцию: $C = (q_1 \cdot t_{шк} + q_2 \cdot t_д) - t_п$, где q_1 и q_2 — коэффициенты, меняющиеся в зависимости от требовательности учителя и усердия ученика. Теперь мы можем построить матрицу игры в общем виде, выбрав коэффициенты и рассматривая выигрыш со стороны учителя (табл. 1).

Таблица 1

Матрица игры

A_i	B_i				α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$(t_{шк} + t_д) - t_п$	$t_{шк} - t_п$	$t_д - t_п$	$(t_{шк} + t_д) - t_п$	α_1
A_2	$(t_{шк} + 1{,}5t_д) - t_п$	$(t_{шк} + 0{,}5t_д) - t_п$	$1{,}5t_д - t_п$	$0{,}5t_д - t_п$	α_2
A_3	$(t_{шк} + t_д) - t_п$	$t_{шк} - t_п$	$(0{,}5t_{шк} + t_д) - t_п$	$0{,}5t_{шк} - t_п$	α_3
A_4	$(t_{шк} + t_д) - t_п$	$(t_{шк} + 0{,}5t_д) - t_п$	$(0{,}5t_{шк} + 1{,}5t_д) - t_п$	$(0{,}5t_{шк} + 0{,}5t_д) - t_п$	α_4
β_i	β_1	β_2	β_3	β_4	

Пояснение: $A_{(\overline{1,4})}$ и $B_{(\overline{1,4})}$ — стратегии поведения учителя и ученика соответственно.

Стратегии учителя: ничего не требует от учеников ни в школе, ни при проверке домашнего задания; ничего не требует от учеников в школе, но очень жестко проверят домашнее задание; очень требователен в школе, но не уделяет внимание домашнему заданию; очень требователен и в школе, и к проверке домашнего задания.

Стратегии ученика: усердно работает в школе и делает всё домашнее задание; усердно работает в школе, но не выполняет домашнее задание; не работает в школе, но делает домашнее задание; не работает ни в школе, ни дома.

В матрице также фигурируют следующие значения:

$\alpha_{(\overline{1,4})}$ — минимальный выигрыш учителя для каждой его стратегии (в предположении, что ученик действует рационально, он будет выбирать стратегию, минимизирующую его проигрыш).

$\beta_{(\overline{1,4})}$ — максимальный проигрыш ученика для каждой его стратегии (в предположении, что учитель действует рационально, он будет выбирать стратегию, максимизирующую его выигрыш).

Эта игра имеет решение согласно теореме «минимакса», и после проведения нескольких расчетов на конкретных числах (табл. 2) можно заметить, что это решение — наибольшая требовательность учителя и наименьшее приложение сил ученика.

Таблица 2

Результаты игр

$t_{шк}$, мин.	$t_{д}$, мин.	$t_{п}$, мин.	$max\alpha_i\ min\beta_i$
270	67,5	405	–236,25
270	135	405	–202,5
270	270	405	–135

Как можно видеть, даже при увеличении времени, выделенного на выполнение домашнего задания, достигнуть поставленного плана не удается. Это связанно с тем, что наша игра рассматривается в идеальных условиях, при которых нет ни отметок, ни каких-либо контрольных элементов.

В заключение можно сказать, что теория игр действительно универсальна и может быть использована даже в сфере образования для создания и использования наиболее оптимальной модели поведения учителя. Безусловно, предложенная модель не идеальна и требует доработки. Ее усовершенствованные варианты будут рассмотрены в следующих работах.

1. *Кузнецова Н. С., Смирнова А. И.* Актуализация междисциплинарных связей на примере усвоения принципа «минимакса» в теории игр // Вестн. Костром. гос. ун-та. Сер. : Педагогика. Психология. Социокинетика. — 2021. — № 1. — С. 174–181.

2. *Мак-Кинзи Дж.* Введение в теорию игр. — М. : Гос. изд-во физико-математ. литературы, 1960. — 420 с.

3. Minimax and Applications. — Boston : Springer US, 1995. — 296 p.