УДК 517

А. Ю. Овсянникова,
факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: канд. пед. наук Т. П. Фисенко

Об уравнении и виде некоторых кривых в полярных координатах

Аннотация. В статье представлены систематизированные результаты исследования анализа параметров уравнения на вид кривых и их положение в полярной системе координат. Указаны отдельные кривые, полученные экспериментальном путем в результате изменения вида уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат.

Ключевые слова: полярная система координат, уравнения кривых, окружность, полярная роза, кривые второго порядка.

Анализ школьных учебников по началам анализа, вузовских программ по математическим дисциплинам показал, что изучению построения кривых в полярной системе координат не отводится специальное время и оно возможно лишь в качестве дополнительного материала. В это же время существуют свидетельства о применении полярной системы координат для определения положения небесных тел еще в первом тысячелетии до нашей эры. В современном мире такая система используется в тех случаях, когда указываются направление движения и расстояние от центра, например в навигации, в физике при изучении течения в круглой трубе, при описании гравитационных полей, при моделировании звуков и т. д.

Несомненная прикладная значимость кривых, заданных в полярных координатах, простота записи некоторых из таких кривых по сравнению с их представлением в прямоугольной системе координат, необычность и красота получающихся в полярной системе координат изображений приводят к пониманию необходимости изучения и анализа таких уравнений и соответствующих кривых. С учетом того, что построение кривых в полярных координатах несколько схоже с обычным построением графиков функций по точкам, с которым обучающиеся знакомятся еще в 7-м классе, с данным материалом можно также познакомить обучающихся старших классов в рамках элективного курса. Дополнительные возможности при этом представляют специальные математические программы, графические калькуляторы, позволяющие выполнять построение в полярной системе координат.

Для определения полярной системы координат задается полюс и полярная ось. Чтобы получить конкретную точку A с координатами $(r; \varphi)$ в полярной системе координат, целесообразно на полярной оси отложить полярный радиус r и повернуть его на некоторый угол φ [1, с. 77–79].

Особого внимания требует вопрос перехода от декартовых к полярным координатам и наоборот, и не только для отдельных точек, но и для кривых, заданных уравнением. Начнем с самой простой кривой второго порядка — окружность. Каноническое уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R в декартовых координатах имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$, а в полярных координатах уравнение такой окружности записывается гораздо проще — $r = R$. Окружность с центром в точке M$(x_0; y_0)$ и радиусом R в декартовых координатах $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, в полярных координатах такое уравнение гораздо сложней: $r^2 - 2r(x_0\cos\varphi + y_0 \sin\varphi) = R^2 - (x_0^2 - y_0^2)$. Однако если такая окружность будет проходить через начало координат, то уравнение примет вид $r = 2(x_0\cos\varphi + y_0 \sin\varphi)$ или $r = 2R\cos(\varphi - \alpha)$, где α — угол между полярной осью и лучом OM, где O — полюс.

В зависимости от значения угла α получаем частные случаи уравнений окружности ($a > 0$) с центром в точке A и радиусом $R = \dfrac{a}{2}$:

1) $\alpha = 0$, $r = a\cos\varphi$ — окружность, в правой полуплоскости, $A\left(\dfrac{a}{2};\ 0\right)$;

2) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $r = a\sin\varphi$ — окружность, в верхней полуплоскости, $A\left(0;\ \dfrac{a}{2}\right)$;

3) $\alpha = \pi$, $r = -a\cos\varphi$ — окружность, в левой полуплоскости, $A\left(-\dfrac{a}{2};\,0\right)$;

4) $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, $r = -a\sin\varphi$ — окружность, в нижней полуплоскости, $A\left(0;-\dfrac{a}{2}\right)$.

Если же в уравнении окружности взять аргумент тригонометрической функции не просто φ, а $k\varphi$, где $k > 1$, то приходим к уравнению полярной розы. Например, $r = a\cos(k\varphi)$.

Вид полярной розы меняется в зависимости от значений параметров a и k:

1) $|a|$ отвечает за длину лепестка;

2) если $k = 2n + 1$, где $n \in N$, то получаем k непересекающихся лепестков (общая центральная точка), если $k = 2n$, где $n \in N$, то получаем $2k$ таких лепестков;

3) если $k = \dfrac{m}{n}$, где $m \in N,\ n \in N,\ m > n$, то лепестки будут пересекаться и чем меньше разность $(m - n)$, тем больше «наложение» лепестков; при m и n нечетных лепестков будет m, а при четном значении m или n получаем $2m$ лепестков.

Кривые второго порядка: эллипс, парабола, гипербола — в полярных координатах задаются уравнением $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$, где p — фокальный периметр, а e — эксцентриситет ($e > 0$) [2, с. 14–18]. Если $e = 1$, то это уравнение задает параболу, если $e > 1$, то — гиперболу, а если $0 < e < 1$, то — эллипс, и частный случай $e = 0$ — окружность. Для эллипса с полуосями a, b (причем $a > b$) и центром в фокусе $p = \dfrac{b^2}{a}$ $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, а для гиперболы с полуосями a, b с центром в фокусе $p = \dfrac{b^2}{a}$ $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Проанализировав, как из уравнения окружности было получено уравнение полярной розы, мы задумались о возможности аналогичных преобразований уравнения эллипса, т. е. вместо аргумента φ, подставляя $k\varphi$, где $k \in Z$, $|k| > 1$. Выведенная экспериментальным путем кривая, заданная уравнением $r = \dfrac{p}{1 - e\cos(k\varphi)}$, где $k \in Z$, $|k| > 1$, получило свое уникальное название «звезда». Примеры некоторых «звезд» представлены на рисунках 1 и 2.

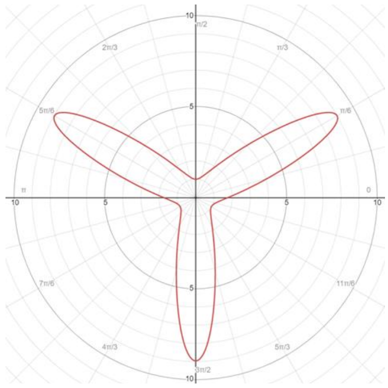

Рис. 1. Звезда $r = \dfrac{9}{5 - 4\sin(3\varphi)}$

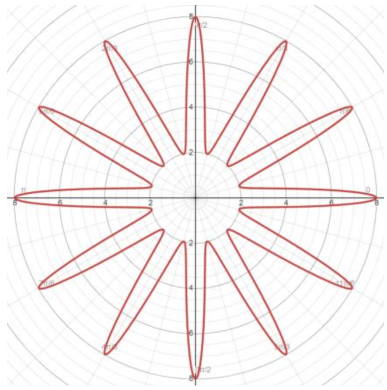

Рис. 2. Звезда $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos(12\varphi)}$

Укажем характеристики графического изображения кривых, названных «звезда»:

1) звездные лепестки не пересекаются;

2) радиус окружности, из которой начинаются лепестки («сердцевины» звезды), равняется $a - \sqrt{a^2 - b^2}$ или $\dfrac{p}{1+e}$;

3) длина лепестков равняется $a + \sqrt{a^2 - b^2}$ или $\dfrac{p}{1-e}$;

4) количество звездных лепестков равняется $|k|$.

Особый интерес также представляют замкнутые кривые, заданные уравнением $r = \dfrac{p}{1 - e\cos(k\varphi)}$, где $k = \dfrac{m}{n}$, $m > n,\ m \in N,\ n \in N, n > 1$.

Дополнительные возможности при исследовании вида полярных кривых представляют графические калькуляторы, позволяющие выполнять построение в полярных координатах.

1. *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии. — М. : Наука, 1968. — 912 с.

2. *Блинова И. В., Попов И. Ю.* Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах : учеб. пособие. — СПб. : Ун-т ИТМО, 2017. — 56 с.