УДК 519.61

Д. А. Плахутина,
факультет математики, информатики, физики и технологии,
Омский государственный педагогический университет
Научный руководитель: канд. пед. наук Л. М. Нуриева

Нестандартные методы решения уравнений и их систем

Аннотация. В статье приведены нестандартные методы решения уравнений и систем уравнений, используемые, чтобы школьники смогли расширить свои знания. При рассмотрении темы анализировалась методическая литература, составлен список нестандартных методов решения, который может быть применим.

Ключевые слова: нестандартные уравнения, системы уравнений, методы решения уравнений и систем уравнений.

Многие школьники при решении уравнений и систем уравнений применяют шаблоны, и поэтому получаются однообразные решения, которые не несут никакой творческой идеи. Поэтому хочется научить школьников абстрагироваться от однотипного решения и показать, что решения могут быть проще и интереснее, если немного подумать и применить нестандартный метод решения.

Нестандартные методы решения уравнений — это такие нетрадиционные методы решений, которые включают в себя творческую идею, развивают мышление, т. е. решение уравнений происходит не по заложенному алгоритму, а с применением оригинальных ходов. Оценка метода решения уравнения с позиции примитивного решения во многом субъективна: насколько непривычен для учащегося предложенный прием, настолько он и нестандартен. И, наверное, самая высокая степень нестандартности идеи — это ее неожиданность.

При рассмотрении различных методов решения уравнений можно выделить следующие:

1. Решение уравнений с помощью исследования ОДЗ.

Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения — это множество значений переменной, при которых данное уравнение будет иметь смысл.

Обычно данный способ удобно применять к уравнениям, в которых требуется избавиться от иррациональности, потому что при использовании обычного алгоритма решения уравнений процесс будет долгим и можно допустить ошибку.

2. Решение уравнений с использованием множества.

При решении некоторых уравнений требуется нахождение множества значений, т. е. множество чисел пробегаемой функцией f(x), когда x примет все возможные значения, входящие в область допустимых значений.

Получается, что иногда проще посмотреть на значения, которые входят в область допустимых значений, чтобы решить уравнения, чем производить большие преобразования, в которых очень легко запутаться. Поэтому данные метод будет целесообразно применять к иррациональным уравнениям, к уравнениям с большим количеством скобок и т. д.

3. Использование монотонности функций при решении уравнений.

При решении данным способом мы вспоминаем, что такое монотонность функции, и применяем это. Для начала мы исследуем уравнения: в какой части уравнения находится функция и какие свойства есть у данной функции, а затем исследуем вторую часть уравнения, какую информацию она нам несет. После этого мы можем переходить к решению.

Основная идея такова: «если функция f(x) монотонно возрастает, а функция g(x) монотонно убывает, то уравнение f(x) = g(x) имеет не более одного решения, причем если $x = x_0$ — решение этого уравнения, то при $x > x_0$ (x входит в область определения обеих функций f(x) и g(x)) будет f(x) > g(x), а при $x < x_0$ будет f(x) < g(x)» [1, с. 15].

Рассмотрим указанные методы при решении уравнения $\sqrt{3+x} = 3-x$.

Функция, расположенная в левой части уравнения, — монотонно возрастающая на области определения, а функция, расположенная в правой части, — монотонно убывающая. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня. Значением корня уравнения является x = 1.

4. Использование эквивалентности при решении уравнений.

При решении уравнений вида f(f(x)) = x полезна бывает теорема: «Если y = f(x) — монотонно возрастающая функция, то уравнения f(x) = x и f(f(x)) = x эквивалентны» [2, с. 18].

При решении уравнений мы для начала исследуем, какие функции встречаются, и определяем свойства функции. Затем анализируем на монотонность функцию и применяем теорему, указанную выше.

5. Использование четности функции при решении уравнений.

При решении данным способом используется следующий алгоритм:

– представить уравнение в виде функции и определить область допустимых значений;

– определить четность/нечетность функции;

– определить симметричность относительно нуля и оси координат;

– если есть нечетное число корней, то x = 0 является корнем уравнения;

– сделать проверку: если найденный корень подходит, то есть действительные корни, если нет, то нет действительных корней.

6. Использование векторов при решении уравнений.

При решении некоторых уравнений удобнее использовать скалярное произведение векторов [1]. При поиске корней некоторых уравнений иногда получается трудоемкий вычислительный процесс, но, благодаря введению векторов относительно уравнения, можно облегчить решение, при этом придерживаться следующего алгоритма:

– Ввести вектор (например вектор a(x_1;x_2) и вектор b(y_1;y_2)).

– Воспользоваться скалярным произведением векторов и их коллинеарностью:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a};\vec{b}\ )$$

– Определить, коллинеарны вектора или нет. Если да, то решаем уравнение как отношение координат векторов $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$.

7. Использование «неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел при решении уравнений» [2, с. 23].

При решении некоторых уравнений иногда удобно пользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, где $a_n \geq 0$.

При решении систем уравнений нередко приходится применять такие преобразования систем, как: умножение обеих частей уравнения на одно и то же число (или одну и ту же функцию), почленное сложение, вычитание, умножение и деление уравнений системы, возведение обеих частей уравнения в *n*-ю степень, а также часто применяется *метод подстановки* (метод исключения неизвестного), с помощью которого решение системы с двумя неизвестными сводится к решению уравнения с одним неизвестным [1].

Иногда при решении систем уравнений удобно использовать *метод введения новых переменных* (заменить повторяющиеся выражения на новую переменную), тогда система примет более удобный вид, и благодаря применению алгоритма решения систем придем к решению. Главное — не забыть вернуться к исходным выражениям.

Изучение различных методов решения нестандартных уравнений и систем уравнений поможет нам углубиться в такую прекрасную науку, как математика. Также благодаря изучению нестандартных методов мы сможем прокачать свое мышление и смотреть на многие дисциплины по-другому или же решать обычные уравнения: линейные, квадратичные, тригонометрические и т. д. — быстрее и интереснее. Если мы разовьем свое мышление, то сможем придавать новый смысл простым школьным заданиям.

Наш мир совершенствуется, соответственно, совершенствуются и нестандартные методы решения систем уравнений. Данные методы являются нетипичными для школы, но понятными для учеников, ввиду этого возникают возможности применения данных методов в различных образовательных средах.

1. *Кобаидзе Н. И.* Нестандартные алгебраические системы уравнений // Копилка уроков : [сайт]. — URL: https://kopilkaurokov.ru/matematika/prochee/niestandartnyie_alghiebraichieskiie_sistiemy_uravnienii (дата обращения: 24.11.2021).

2. *Рыбенкова М. П.* Нестандартные методы решения уравнений // Инфоурок : образоват. портал. — URL: https://ds02.infourok.ru/uploads/doc/0578/000018ff-8bd057cf.doc (дата обращения: 24.11.2021).