

УДК 517

**А. А. Терджанян,**факультет математики, информатики, физики и технологии,  
Омский государственный педагогический университет  
Научный руководитель: канд. пед. наук Т. П. Фисенко

## Исследование неявно заданных функций

**Аннотация.** Статья посвящена результатам изучения вопроса об исследовании неявно заданных функций. Представлен план исследования неявно заданных функций. Приведены примеры, проверяющие достаточность плана для построения кривых, заданных неявным уравнением.

**Ключевые слова:** функция, неявно заданная функция, многозначная функция, кривая, план исследования функций.

**Ф**ункция — одно из основных понятий математического анализа. Как в школьном, так и вузовском курсах математического анализа преимущественно изучаются функции, представленные в явном виде, которые задаются уравнением  $y = f(x)$ . Для освоения школьникам и студентам предлагается стандартная схема исследования функций, являющаяся основой для построения графиков таких функций. Однако для описания закономерностей между величинами, наряду с явно заданными функциями, нередко используются параметрические и неявно заданные функции, которые остаются практически неизученными. В то же время исследование и представление неявно заданных функций является достаточно важным, поскольку такие функции используются в геометрии, компьютерной графике, экономике, отдельных разделах физики.

Если функция задана уравнением  $y = f(x)$ , разрешенным относительно зависимой переменной  $y$ , то функция называется заданной в явном виде (явная функция) [2]. Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения  $F(x, y) = 0$ , не разрешенного относительно  $y$  [3, с. 152].

Задание явных функций предполагает их однозначность, а уравнение  $F(x, y) = 0$ , определяющее неявную функцию, не всегда для возможного значения независимой переменной  $x$  позволяет указать единственное значение  $y$ . Таким образом, рассматривая неявные функции, будем их характеризовать как многозначные, т. е. для допустимых значений  $x$  может быть найдено несколько значений зависимой переменной  $y$ .

Для исследования явных функций существует стандартная схема, по результатам выполнения пунктов которой можно построить график исследуемой функции. Однако для исследования неявно

заданных функций этот план в явном виде не применим, и его следует несколько изменить. В результате анализа соответствующей учебной литературы [1; 2] мы пришли к выводу, что неявно заданные функции целесообразно исследовать по плану, представленному на рисунке 1, где также для сравнения указан план исследования явных функций.

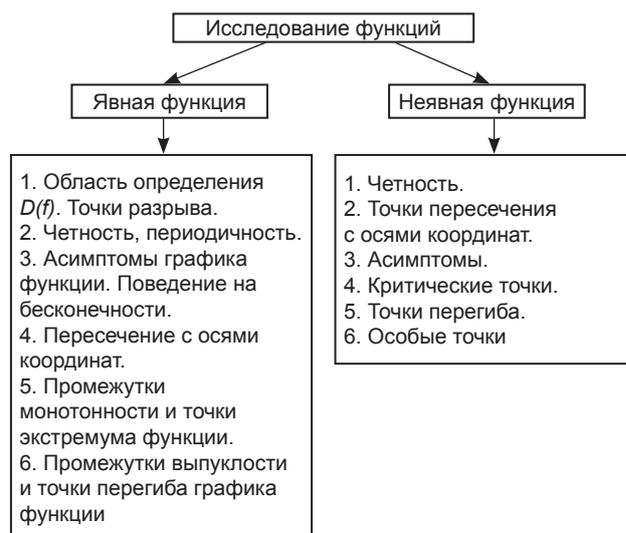


Рис. 1. План исследования функций

Достаточность разработанного плана исследования была проверена для ряда неявных функций, на основе результатов которого были построены кривые, заданные уравнением  $F(x, y) = 0$ . При проведении исследования использовались однозначные и многозначные неявно заданные функции. С целью проверки точности построения кривых по результатам проведенных исследований неявно заданных функций использовался Интернет-сервис Desmos.

Исследование неявных функций мы провели по двум направлениям:

1) исследование неявно заданных функций, приводимых к функциям, заданным в явном виде;

2) исследование многочлена относительно переменных  $x$  и  $y$  и построение алгебраических кривых.

Приведем примеры, относящиеся к каждому из выделенных направлений. В первом случае исследование неявных функций проводилось по разработанному плану (рис. 1), а затем выполнялся переход к явно заданным функциям, и исследование осуществлялось с применением стандартной схемы. Были рассмотрены функции, заданные уравнением  $F(x, y) = 0$ , из которого можно было однозначно выразить переменную  $y$  или переменную  $x$  или переменная  $y$  выражалась неоднозначно, но исследование и построение одной явной части

и использование симметричности искомой кривой относительно оси абсцисс позволяло прийти к необходимому результату. Примеры некоторых рассмотренных в этой части функций представлены на рисунке 2. При сравнении результатов использования двух планов исследования мы обнаружили их совпадение.

Во втором направлении рассматривали ситуации, когда у переменных  $x$  и  $y$  в уравнении неявно заданной кривой изменялись показатели степеней (рис. 3). Исследование проводилось по выделенному плану для неявных функций. Заметим, что при реализации каждого из пунктов имелись отличия от схожего с ним, но выполняемого для явных функций.

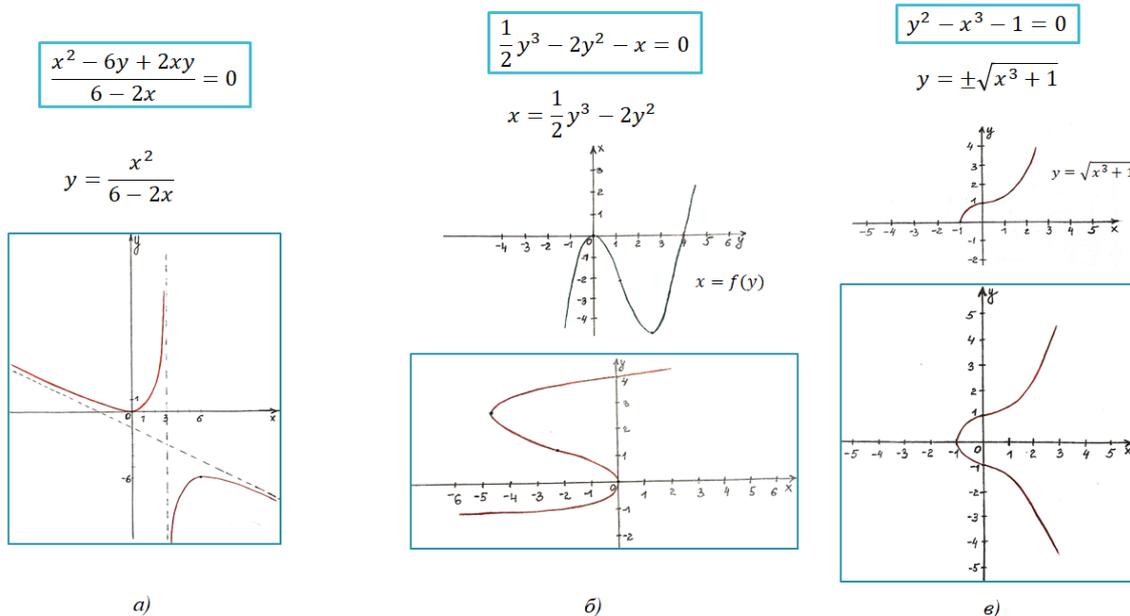


Рис. 2. Исследование неявно заданных функций, приводимых к функциям, заданным в явном виде

При проверке правильности выполненного нами изображения кривой по результатам исследования в некоторых случаях мы имели дело с кривы-

ми второго порядка или специальными «именными» кривыми. Например, нами были рассмотрены гиперболою (рис. 3, в) и декартов лист (рис. 3, б).

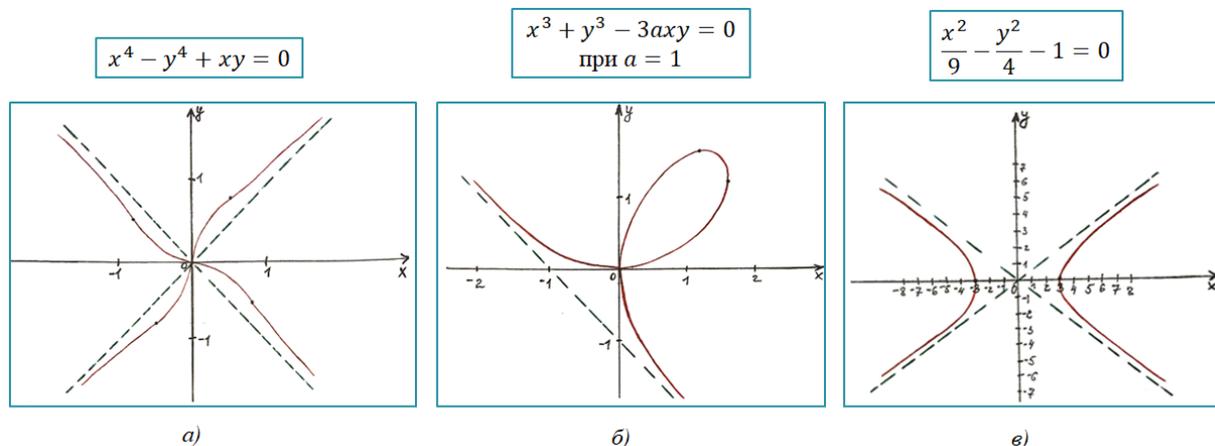


Рис. 3. Исследование многочлена относительно переменных  $x$  и  $y$  и построение алгебраических кривых

Разобранные примеры позволяют прийти к выводу, что указанный план достаточен для выполнения построения кривых на основе его результатов.

1. *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / под общ. ред. В. А. Садовничего. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 416 с.
2. *Вирченко Н. А., Ляшко И. И., Швецов К. И.* Графики функций. Справочник. — Киев : Наук. думка, 1979. — 320 с.
3. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике : [в 2 ч.]. — М. : Айрис-пресс, 2006. — Ч. 1. — 288 с.